

自由時報 參考解答

此參考解答由台北市補習教育事業協會提供
正式解答請以大考中心提供為準

大學入學考試中心 108 學年度指定科目考試試題 數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：• 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。

- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\square_3$ 與第 19 列的 $\square_8$ 畫記，如：

18	$\square_1$	$\square_2$	$\blacksquare_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{\pm}$
19	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\blacksquare_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{\pm}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\square_{-}$ 與第 21 列的 $\square_7$ 畫記，如：

20	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\square_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\blacksquare_{-}$	$\square_{\pm}$
21	$\square_1$	$\square_2$	$\square_3$	$\square_4$	$\square_5$	$\square_6$	$\blacksquare_7$	$\square_8$	$\square_9$	$\square_0$	$\square_{-}$	$\square_{\pm}$

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- 2** 1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 400 元；若出現一正一反可得獎金 800 元；若出現兩個正面可得獎金 800 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）。試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何？
- (1) 850 元
(2) 875 元
(3) 900 元
(4) 925 元
(5) 950 元
- 5** 2. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數（Fermat Number）定義為 $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ ，例如 $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ ， $F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ 。試問 $\frac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？（ $\log 2 \approx 0.3010$ ）
- (1) 120
(2) 240
(3) 600
(4) 900
(5) 1200

3. 在一座尖塔的正南方地面某點 A ，測得塔頂的仰角為 14° ；又在此尖塔正東方地面某點 B ，測得塔頂的仰角為 $18^\circ 30'$ ，且 A 、 B 兩點距離為 65 公尺。已知當在線段 $\overline{AB}$ 上移動時，在 C 點測得塔頂的仰角為最大，則 C 點到塔底的距離最接近下列哪一個選項？（ $\cot 14^\circ \approx 4.01$ ， $\cot 18^\circ 30' \approx 2.99$ ）
- (1) 27 公尺
 - (2) 29 公尺
 - (3) 31 公尺
 - (4) 33 公尺
 - (5) 35 公尺

二、多選題（占 40 分）

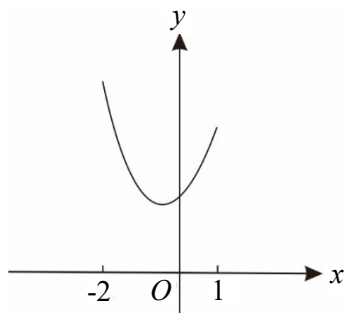
說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- 2
5 4. 設 Γ 為坐標平面上通過 $(7,0)$ 與 $(0,\frac{7}{2})$ 兩點的圓。試選出正確的選項。
- (1) Γ 的半徑大於或等於 5
 - (2) 當 Γ 的半徑達到最小可能值時， Γ 通過原點
 - (3) Γ 與直線 $x+2y=6$ 有交點
 - (4) Γ 的圓心不可能在第四象限
 - (5) 若 Γ 的圓心在第三象限，則 Γ 的半徑大於 8

- 1
5
5. 袋中有 2 顆紅球、3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同。今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。試選出正確的選項。
- (1) 「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率
 - (2) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件
 - (3) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件
 - (4) 「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率
 - (5) 「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率

- 3
4
6. 設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n ， $a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ ，試選出正確的選項。
- (1) 對所有的正整數 n ， $a_n > 3$ 均成立
 - (2) 存在正整數 n ，使得 $a_{n+1} > 4$
 - (3) 對所有的正整數 n ， $b_n^2 < b_{n+1}^2$ 均成立
 - (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 4$
 - (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$

- 2
3
5
7. 已知三次實係數多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ ，在 $-2 \leq x \leq 1$ 範圍內的圖形如示意圖：



試選出正確的選項。

- (1) $a > 0$
- (2) $b > 0$
- (3) $c > 0$
- (4) 方程式 $f(x) = 0$ 恰有三實根
- (5) $y = f(x)$ 圖形的反曲點的 y 坐標為正

- 1
5
8. 坐標平面上以原點 O 為圓心的單位圓上三相異點 A 、 B 、 C 滿足 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ ，其中 A 點的坐標為 $(1, 0)$ 。試選出正確的選項。

- (1) 向量 $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ 的長度為 4
- (2) 內積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$
- (3) $\angle BOC$ 、 $\angle AOC$ 、 $\angle AOB$ 中，以 $\angle BOC$ 的度數為最小
- (4) $\overline{AB} > \frac{3}{2}$
- (5) $3\sin \angle AOB = 4\sin \angle AOC$

三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (9–18)。
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ，其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 代表舊坐標， $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 代表新坐標。若舊坐標為 $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ，則 $(r, s) = (\underline{\textcircled{9}}, \underline{\textcircled{10}\textcircled{11}})$ 。

3 - 1

- B. 在坐標平面上， $A(a, r)$ 、 $B(b, s)$ 為函數圖形 $y = \log_2 x$ 上之兩點，其中 $a < b$ 。已知 A 、 B 連線的斜率等於 2，且線段 $\overline{AB}$ 的長度為 $\sqrt{5}$ ，則 $(a, b) = (\frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}, \frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}})$ 。
(化成最簡分數)

1 4
3 , 3

- C. 設 z 為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為 z 、 0 、 $z + 5 - 2\sqrt{3}i$ (其中 $i = \sqrt{-1}$)，則 z 的實部為 $\frac{\textcircled{16}\textcircled{17}}{\textcircled{18}}$ 。(化成最簡分數)

- 7
2

— — — 以下是第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答 — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一．坐標空間中以 O 表示原點，給定兩向量 $\overrightarrow{OA} = (1, \sqrt{2}, 1)$ 、 $\overrightarrow{OB} = (2, 0, 0)$ 。試回答下列問題。

- (1) 若 $\overrightarrow{OP}$ 是長度為 2 的向量，且與 $\overrightarrow{OA}$ 之夾角為 60° ，試求向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 的內積。（2 分）
- (2) 承(1)，已知滿足此條件的所有點 P 均落在一直線 E 上，試求平面 E 的方程式。（2 分）
- (3) 若 $\overrightarrow{OQ}$ 是長度為 2 的向量，分別與 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 之夾角皆為 60° ，已知滿足此條件的所有點 Q 均落在一直線 L 上，試求直線 L 的方向向量。（4 分）
- (4) 承(3)，試求出滿足條件的所有 Q 點之坐標。（4 分）

二．設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + \int_1^x f(t) dt$ 對 $x \geq 1$ 恆成立。試回答下列問題。

- (1) 試求 $f(1)$ 。（2 分）
- (2) 試求 $f'(x)$ 。（4 分）
- (3) 試求 $f(x)$ 。（2 分）
- (4) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x) dx = 1$ 。（4 分）

(一)

$$(1) |\vec{OA}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + 1^2} = 2$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OP} = |\vec{OA}| |\vec{OP}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$(2) \text{ 設 } P(x, y, z), \text{ 則 } \vec{OP} = (x, y, z)$$

$$\text{依題意} \Rightarrow (1, \sqrt{2}, 1) \cdot (x, y, z) = 2$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{2}y + z = 2 \text{ 即為所求平面 } E$$

$$(3) \text{ 依題意: } \begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{OR} = |\vec{OA}| |\vec{OR}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2 \\ \vec{OB} \cdot \vec{OR} = |\vec{OB}| |\vec{OR}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{設 } Q(x, y, z), \text{ 則 } \vec{OR} = (x, y, z)$$

$$\text{代回上式: } \begin{cases} (1, \sqrt{2}, 1) \cdot (x, y, z) = 2 \\ (2, 0, 0) \cdot (x, y, z) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 2 \\ 2x = 2 \rightarrow x = 1 \end{cases} \text{ 為所求 } L \text{ 之兩曲式}$$

$$\text{其方向向量 } \vec{c} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2, \text{ 其中 } \vec{n}_1 = (1, \sqrt{2}, 1), \vec{n}_2 = (2, 0, 0)$$

$$\therefore \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (0, 2, -2\sqrt{2}), \text{ 故取 } \vec{c} = (0, 1, -\sqrt{2})$$

$$(4) \text{ 令 } x=1, y=0 \text{ 代入 } x + \sqrt{2}y + z = 2, \text{ 得 } z=1$$

$$\text{即 } L \text{ 通過 } (1, 0, 1).$$

$$\text{故 } L: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 - \sqrt{2}t \end{cases} \text{ 或 } L: x=1, \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-\sqrt{2}}$$

$$\text{又 } |\vec{OR}| = 2 \Rightarrow \sqrt{1^2 + t^2 + (1 - \sqrt{2}t)^2} = 2$$

$$\Rightarrow 1 + t^2 + 1 - 2\sqrt{2}t + 2t^2 = 4$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 2\sqrt{2}t - 2 = 0$$

$$\text{得 } t = \sqrt{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore Q \text{ 為 } (1, \sqrt{2}, -1) \text{ 或 } (1, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{5}{3})$$

二、

$$(1) \text{利用 } xf(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + \int_1^x f(t) dt$$

$$\text{取 } x=1 \text{ 代入上式: } 1 \cdot f(1) = 3 - 2 + 1 + \int_1^1 f(t) dt \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(1) = 2$$

$$(2) \text{對原題整式作 } \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[xf(x)] = \frac{d}{dx}[3x^4 - 2x^3 + x^2 + \int_1^x f(t) dt]$$

$$\Rightarrow f(x) + xf'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x + \frac{d}{dx} \int_1^x f(t) dt \rightarrow f(x)$$

$$\text{其中, 因微積分基本定理, } \frac{d}{dx} \int_1^x f(t) dt = f(x)$$

$$\Rightarrow xf'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 6x + 2$$

$$(3) f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 6x + 2) dx$$

$$= 4x^3 - 3x^2 + 2x + c$$

$$\text{又 } f(1) = 2 \text{ 代入上式} \Rightarrow f(1) = 4 - 3 + 2 + c = 2 \Rightarrow c = -1$$

$$\text{即 } f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$(4) \int_0^a f(x) dx = \int_0^a (4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) dx$$

$$= x^4 - x^3 + x^2 - x \Big|_0^a = a^4 - a^3 + a^2 - a$$

$$\therefore \int_0^a f(x) dx = 1 \Rightarrow a^4 - a^3 + a^2 - a = 1$$

$$\Rightarrow a^4 - a^3 + a^2 - a - 1 = 0 \text{ 令 } g(a) = a^4 - a^3 + a^2 - a - 1$$

$$\text{又 } g(1) \cdot g(2) = (-1)(9) = -9 < 0$$

故 $g(a) = 0$ 在 $1 \sim 2$ 之間有實根

$$\text{但 } g'(a) = 4a^3 - 3a^2 + 2a - 1 = (a-1)(4a^2 + a + 3) + 2$$

故當 $a > 1$ 時 $g'(a)$ 恆大於 0

即 $g(a)$ 之圖形在 $a > 1$ 時為遞增

故 $g(a) = 0$ 在 $1 \sim 2$ 之間僅有一實根

即恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x) dx = 1$