

自由時報 參考解答
此參考解答由台北市補習教育事業協會提供
正式解答請以大考中心提供為準

大學入學考試中心
109 學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：• 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。

- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{\square}{\square}$ 畫記，如：

18	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\blacksquare}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$
19	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\blacksquare}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{\square}{\square}$ 畫記，如：

20	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\square}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\blacksquare}$	$\frac{\pm}{\square}$
21	$\frac{1}{\square}$	$\frac{2}{\square}$	$\frac{3}{\square}$	$\frac{4}{\square}$	$\frac{5}{\square}$	$\frac{6}{\square}$	$\frac{7}{\blacksquare}$	$\frac{8}{\square}$	$\frac{9}{\square}$	$\frac{0}{\square}$	$\frac{-}{\square}$	$\frac{\pm}{\square}$

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

5

1. 已知 $45^\circ < \theta < 50^\circ$ ，且設 $a = 1 - \cos^2 \theta$ 、 $b = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta$ 、 $c = \frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1}$ 。關於 a, b, c 三個數

值的大小，試選出正確的選項。

- (1) $a < b < c$
- (2) $a < c < b$
- (3) $b < a < c$
- (4) $b < c < a$
- (5) $c < a < b$

3

2. 有 A, B 兩個箱子，其中 A 箱有 6 顆白球與 4 顆紅球， B 箱有 8 顆白球與 2 顆藍球。現有三種抽獎方式（各箱中每顆球被抽取的機率相同）：

- （一）先在 A 箱中抽取一球，若抽中紅球則停止，若抽到白球則再從 B 箱中抽取一球；
- （二）先在 B 箱中抽取一球，若抽中藍球則停止，若抽到白球則再從 A 箱中抽取一球；
- （三）同時分別在 A, B 箱中各抽取一球。

給獎方式為：在紅、藍這兩種色球當中，若只抽到紅球得 50 元獎金；若只抽到藍球得 100 元獎金；若兩種色球都抽到，則仍只得 100 元獎金；若都沒抽到，則無獎金。將上列（一）、（二）、（三）這 3 種抽獎方式所得獎金的期望值分別記為 E_1 、 E_2 、 E_3 ，試選出正確的選項。

- (1) $E_1 > E_2 > E_3$
- (2) $E_1 = E_2 > E_3$
- (3) $E_2 = E_3 > E_1$
- (4) $E_1 = E_3 > E_2$
- (5) $E_3 > E_2 > E_1$

- 2 3. 根據實驗統計，某種細菌繁殖，其數量平均每 3.5 小時會擴增為 2.4 倍。假設實驗室的試管一開始有此種細菌 1000 隻，根據指數函數模型，試問大約在多少小時後此種細菌的數量會到達 4×10^{10} 隻左右？（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）
- (1) 63 小時
(2) 70 小時
(3) 77 小時
(4) 84 小時
(5) 91 小時

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- 4 5 4. 在坐標平面上，設 O 為原點，且 A 、 B 為異於 O 的相異兩點。令 C_1, C_2, C_3 為平面上三個點，且滿足 $\overrightarrow{OC_n} = \overrightarrow{OA} + n \overrightarrow{OB}$ ， $n=1,2,3$ ，試選出正確的選項。
- (1) $\overrightarrow{OC_1} \neq \vec{0}$
(2) $\overline{OC_1} < \overline{OC_2} < \overline{OC_3}$
(3) $\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OA} < \overrightarrow{OC_3} \cdot \overrightarrow{OA}$
(4) $\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC_2} \cdot \overrightarrow{OB} < \overrightarrow{OC_3} \cdot \overrightarrow{OB}$
(5) C_1, C_2, C_3 在同一直線上

1
5

5. 對一實數 a ，以 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，例如： $[1.2] = [\sqrt{2}] = 1$ ， $[-1.2] = -2$ 。

考慮無理數 $\theta = \sqrt{10001}$ ，試選出正確的選項。

- (1) $a-1 < [a] \leq a$ 對任意實數 a 均成立
- (2) 數列 $b_n = \frac{[n\theta]}{n}$ 發散， n 為正整數
- (3) 數列 $c_n = \frac{[-n\theta]}{n}$ 發散， n 為正整數
- (4) 數列 $d_n = n \left[\frac{\theta}{n} \right]$ 發散， n 為正整數
- (5) 數列 $e_n = n \left[\frac{-\theta}{n} \right]$ 發散， n 為正整數

1
2

6. 設 $F(x)$ 、 $f(x)$ 皆為實係數多項式函數。已知 $F'(x) = f(x)$ ，試選出正確的選項。

- (1) 若 $a \geq 0$ ，則 $F(a) - F(0) = \int_0^a f(t) dt$
- (2) 若 $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$ ，則 $Q(0) = f(0)$
- (3) 若 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除，則 $F(x) - F(0)$ 可被 $(x+1)^2$ 整除
- (4) 若對所有實數 x ， $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$ 都成立，則對所有實數 x ， $f(x) \geq x$ 也都成立
- (5) 若對所有 $x > 0$ ， $f(x) \geq x$ 都成立，則對所有 $x > 0$ ， $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$ 也都成立

1
4
5

7. 在複數平面上，設 O 為原點，且 A 、 B 分別表示坐標為複數 z 、 $z+1$ 的點。已知點 A 、點 B 都在以 O 為圓心的單位圓上，試選出正確的選項。

- (1) 直線 AB 與實數軸平行
- (2) $\triangle OAB$ 為直角三角形
- (3) 點 A 在第二象限
- (4) $z^3 = 1$
- (5) 坐標為 $1 + \frac{1}{z}$ 的點也在同一單位圓上

2
5

8. 設二階實係數方陣 A 代表坐標平面的一個鏡射變換且滿足 $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ；另設二階實係數方陣 B 代表坐標平面的一個（以原點為中心的）旋轉變換且滿足 $B^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，試選出正確的選項。

- (1) A 恰有三種可能
- (2) B 恰有三種可能
- (3) $AB = BA$
- (4) 二階方陣 AB 代表坐標平面的一個旋轉變換
- (5) $BABA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (9–19)。

2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 在坐標空間中，設 O 為原點，且點 P 為三平面 $x-3y-5z=0$ 、 $x-3y+2z=0$ 、 $x+y=t$ 的交點，其中 $t>0$ 。若 $\overline{OP}=10$ ，則 $t=$ ⑨ $\sqrt{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。(化成最簡根式)

4 1 0

- B. 考慮坐標平面上相異三點 A 、 B 、 C ，其中點 A 為 $(1,1)$ 。分別以線段 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 為直徑作圓，此兩圓交於點 A 及點 $P(4,2)$ 。已知 $\overline{PB}=3\sqrt{10}$ 且點 B 在第四象限，則點 B 的坐標為 (⑫ , ⑬⑭)。

7

- 7

- C. 有一個三角形公園，其三頂點為 O 、 A 、 B ，在頂點 O 處有一座 150 公尺高的觀景台，某人站在觀景台上觀測地面上另兩個頂點 A 、 B 與 $\overline{AB}$ 的中點 C ，測得其俯角分別為 30° 、 60° 、 45° 。則此三角形公園的面積為 ⑮⑯⑰⑱ $\sqrt{\textcircled{19}}$ 平方公尺。

(化成最簡根式)

7 5 0 0 2

— — — 以下是第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答 — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一. 坐標平面上，由 A 、 B 、 C 、 D 四點所決定的「貝茲曲線」(Bézier curve) 指的是次數不超過 3 的多項式函數，其圖形通過 A, D 兩點，且在點 A 的切線通過點 B ，在點 D 的切線通過點 C 。令 $y = f(x)$ 是由 $A(0,0)$ 、 $B(1,4)$ 、 $C(3,2)$ 、 $D(4,0)$ 四點所決定的「貝茲曲線」，試回答下列問題。

- (1) 設 $y = f(x)$ 的圖形在點 D 的切線方程式為 $y = ax + b$ ，其中 a, b 為實數。求 a, b 之值。（2 分）
- (2) 試證明多項式 $f(x)$ 可以被 $x^2 - 4x$ 所整除。（2 分）
- (3) 試求 $f(x)$ 。（4 分）
- (4) 求定積分 $\int_2^6 |8f(x)| dx$ 之值。（4 分）

背面還有試題

一、 假設 $\Rightarrow$ 設 $f(x) = x(x-4)(px+q)$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ 點的切線斜率} = m_{AB} = \frac{4-0}{1-0} = 4 \\ B \text{ 點的切線斜率} = m_{CB} = \frac{0-2}{4-3} = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 4, \text{ 其中 } f(x) = px^3 + (-4p+q)x^2 - 4qx \\ f'(4) = -2 \end{array} \right.$$

$$\therefore f'(x) = 3px^2 + 2(-4p+q)x - 4q$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4q = 4 \\ 48p + 8(-4p+q) - 4q = 16p + 4q = -2 \end{array} \right.$$

得 $p = \frac{1}{8}, q = -1$, 即 $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

(1) 所求切線 $\overleftrightarrow{CB}: y = -2x + 8$

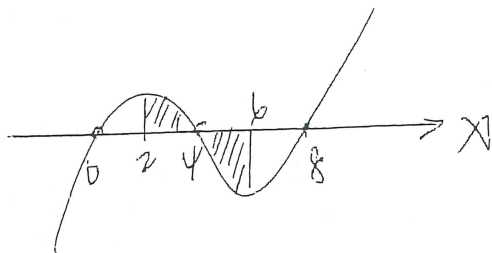
(2) $f(x) = x(x-4)(\frac{1}{8}x-1) = (x^2-4x)(\frac{1}{8}x-1)$
 具 x^2-4x 之因式, 故必可整除

(3) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

$$\begin{aligned} (4) \int_2^6 |8f(x)| dx &= \int_2^6 (x^3 - 12x^2 + 32x) dx \\ &= \int_2^6 (x)(x-4)(x-8) dx \end{aligned}$$

非選二更正！
大題

1. 作圖：

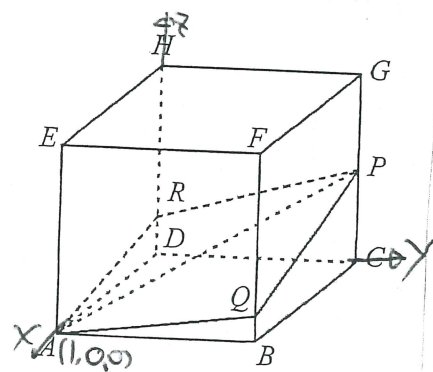


$$\begin{aligned} \therefore \text{所求} &= \int_0^4 (x^3 - 12x^2 + 32x) dx + \left[- \int_4^8 (x^3 - 12x^2 + 32x) dx \right] \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 16x^2 \right) \Big|_0^4 - \left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 16x^2 \right) \Big|_4^8 \\ &= (64 - 36) - (36 - 64) = 56 \end{aligned}$$

二. (1) $p = (0, 1, \frac{1}{2})$

(2) $\vec{AR} = \vec{QP} = (-1, 0, \frac{1}{2} - t)$

(3) $\vec{AR} \times \vec{AQ} = (-1, 0, \frac{1}{2} - t) \times (0, 1, t) = (-\frac{1}{2} + t, t, -1)$



故 $\vec{PG}$ 在 $\vec{AR} \times \vec{AQ}$ 上之正射影長

$$= \frac{|\vec{PG} \cdot (\vec{AR} \times \vec{AQ})|}{|\vec{AR} \times \vec{AQ}|} = \frac{|(0, 0, \frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2} + t, t, -1)|}{\sqrt{(-\frac{1}{2} + t)^2 + t^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2t^2 - t + \frac{5}{4}}} = h$$

$$\Rightarrow \text{所求} = \frac{1}{3} |\vec{AR} \times \vec{AQ}| \times h = \frac{1}{3} \sqrt{2t^2 - t + \frac{5}{4}} \times \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2t^2 - t + \frac{5}{4}}} = \frac{1}{6}, \text{為定值, 與 } t \text{ 無關}$$

(4) $t = \frac{1}{4}$ 時 $h = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$