財團法人大學入學考試中心基金會

111學年度學科能力測驗試題

數學A考科

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

  例：若答案格式是 $\dfrac{\text{18-1}}{\text{18-2}}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
18-2	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

  例：若答案格式是 $\dfrac{\text{19-1}\ \text{19-2}}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 19-2 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
19-2	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

4

1. 某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球（可為同一口味）共有幾種方法？

   (1) 101　　(2) 105　　(3) 115　　(4) 120　　(5) 225

1

2. 某品牌計算機在計算對數 $\log_a b$ 時需按 $\boxed{\log}\ \boxed{(}\ \boxed{a}\ \boxed{,}\ \boxed{b}\ \boxed{)}$。某生在計算 $\log_a b$ 時（其中 $a>1$ 且 $b>1$）順序弄錯，誤按 $\boxed{\log}\ \boxed{(}\ \boxed{b}\ \boxed{,}\ \boxed{a}\ \boxed{)}$，所得為正確值的 $\dfrac{9}{4}$ 倍。試選出 a,b 間的關係式。

   (1) $a^2=b^3$　　(2) $a^3=b^2$　　(3) $a^4=b^9$　　(4) $2a=3b$　　(5) $3a=2b$

5

3. 在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。下圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？

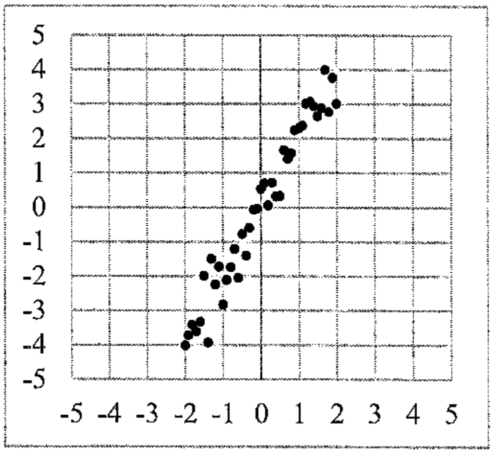
   (1) $y=2x$

   (2) $y=-2x$

   (3) $y=-x$

   (4) $y=\dfrac{x}{2}$

   (5) $y=-\dfrac{x}{2}$



3

4. 設等差數列 $\langle a_n\rangle$ 之首項 a_1 與公差 d 皆為正數，且 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 依序也成等差數列。試選出數列 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 的公差。

   (1) $\log d$　　(2) $\log\dfrac{2}{3}$　　(3) $\log\dfrac{3}{2}$　　(4) $\log 2d$　　(5) $\log 3d$

2

5. 已知某地區有 30%的人口感染某傳染病。針對該傳染病的快篩試劑檢驗，有陽性或陰性兩結果。已知該試劑將染病者判為陽性的機率為 80%，將未染病者判為陰性的機率則為 60%。為降低該試劑將染病者誤判為陰性的情況，專家建議連續採檢三次。若單次採檢判為陰性者中，染病者的機率為 P；而連續採檢三次皆判為陰性者中，染病者的機率為 P'。試問 $\frac{P}{P'}$ 最接近哪一選項？

(1) 7　(2) 8　(3) 9　(4) 10　(5) 11

5

6. 設坐標平面上兩直線 L_1, L_2 的斜率皆為正，且 L_1, L_2 有一夾角的平分線斜率為 $\frac{11}{9}$。另一直線 L 通過點 $(2, \frac{1}{3})$ 且與 L_1, L_2 所圍的有界區域為正三角形，試問 L 的方程式為下列哪一選項？

(1) $11x-9y=19$　(2) $9x+11y=25$　(3) $11x+9y=25$
(4) $27x-33y=43$　(5) $27x+33y=65$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

2, 4

7. 設整數 n 滿足 $|5n-21| \geq 7|n|$。試選出正確的選項。

(1) $|5n-7n| \geq 21$　(2) $-1 \leq \frac{7n}{5n-21} \leq 1$　(3) $7n \leq 5n-21$
(4) $(5n-21)^2 \geq 49n^2$　(5) 滿足題設不等式的整數 n 有無窮多個

1, 4

8. 坐標平面上，ΔABC 三頂點的坐標分別為 $A(0,2), B(1,0), C(4,1)$，試選出正確的選項。

(1) ΔABC 的三邊中，$\overline{AC}$ 最長
(2) $\sin A < \sin C$
(3) ΔABC 為銳角三角形
(4) $\sin B = \frac{7\sqrt{2}}{10}$
(5) ΔABC 的外接圓半徑比 2 小

3, 4 9. 已知 P 為 ΔABC 內一點，且 $\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$，其中 a, b 為相異實數。設 Q,R 在同一平面上，且 $\overrightarrow{AQ}=b\overrightarrow{AB}+a\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AR}=a\overrightarrow{AB}+(b-0.05)\overrightarrow{AC}$。試選出正確的選項。

(1) Q,R 也都在 ΔABC 內部

(2) $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\left|\overrightarrow{AQ}\right|$

(3) ΔABP 面積 $=\Delta ACQ$ 面積

(4) ΔBCP 面積 $=\Delta BCQ$ 面積

(5) ΔABP 面積 $>\Delta ABR$ 面積

1, 2 10. 給定一實係數三次多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+3$。令 $g(x)=f(-x)-3$，已知 $y=g(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1,0)$ 且 $g(-1)<0$。試選出正確的選項。

(1) $g(x)=0$ 有三相異整數根

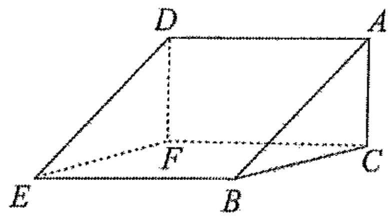
(2) $a<0$

(3) $y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-1,-3)$

(4) $f(100)<0$

(5) $y=f(x)$ 的圖形在點 $(-1,f(-1))$ 附近會近似於一條斜率為 a 的直線

2, 3, 4 11. 下圖為一個積木的示意圖，其中 ABC 為一直角三角形，$\angle ACB=90°$，$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=6$，且 $ADEB$ 與 $ADFC$ 皆為矩形。試選出正確的選項。



(1) 將此積木沿平面 ACE 切下，可切得兩個四面體

(2) 平面 $ADEB$ 與 $ADFC$ 所夾銳角大於 45°

(3) $\angle CEB<\angle AEB$

(4) $\tan\angle AEC<\sin\angle CEB$

(5) $\angle CEB<\angle AEC$

1, 2

12. 設 $f(x), g(x)$ 皆為實係數多項式，其中 $g(x)$ 是首項係數為正的二次式。已知 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $g(x)$，且 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點。試選出不可能是 $y=g(x)$ 圖形頂點的 y 坐標之選項。

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) 2 (5) π

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 有一款線上遊戲推出「十連抽」的抽卡機制，「十連抽」意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次「十連抽」需用 1500 枚代幣，抽中金卡的機率在前九次皆為 2%，在第十次為 10%。今某生有代幣 23000 枚，且不斷使用「十連抽」，抽到不能再抽為止。則某生抽到金卡張數的期望值為 (13-1).(13-2) 張。

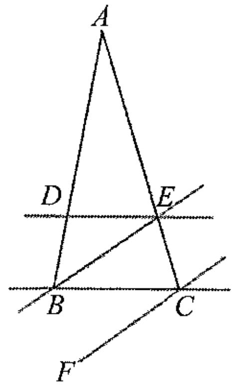
4 2

14. 已知 a 、 b 為實數，且方程組 $\begin{cases} ax+5y+12z=4 \\ x+ay+\frac{8}{3}z=7 \\ 3x+8y+az=1 \end{cases}$ 恰有一組解，又此方程組經過一系列的高斯消去法運算後，原來的增廣矩陣可化為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & b & 7 \\ 0 & b & 5 & -5 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]$。則 $a=$ (14-1)，$b=\frac{(14\text{-}2)}{(14\text{-}3)}$。（化為最簡分數）

2 $\frac{1}{2}$

15. 如圖，王家有塊三角形土地 ΔABC，其中 $\overline{BC}=16$ 公尺。政府擬徵收其中梯形 $DBCE$ 部分，開闢以直線 DE,BC 為邊線的馬路，其路寬為 h 公尺，這讓王家土地只剩原有面積的 $\frac{9}{16}$。經協商，改以開闢平行直線 BE,FC 為邊線的馬路，且路寬不變，其中 $\angle EBC=30°$，則只需徵收 ΔBCE 區域。依此協商，王家剩餘的土地 ΔABE 有 (15-1)(15-2)(15-3) 平方公尺。

1 9 2



16. 坐標空間中，平面 $x-y+2z=3$ 上有兩相異直線 $L:\frac{x}{2}-1=y+1=-2z$ 與 L'。
已知 L 也在另一平面 E 上，且 L' 在 E 的投影與 L 重合。
則 E 的方程式為 $x+$ (16-1)(16-2) $y+$ (16-3)(16-4) $z=$ (16-5)。

− 3　　− 2　　5

17. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $(-1,2,1),(-4,1,3),(2,0,-3)$，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為 (17-1)(17-2)。

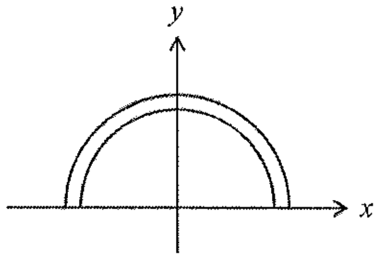
2 1

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2+y^2=3$ 的外部與圓 $x^2+y^2=4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 $C_1: x^2+y^2=3\,(y\geq 0)$、$C_2: x^2+y^2=4\,(y\geq 0)$ 上移動。開始時掃描棒黑端在點 $A(\sqrt{3},0)$，白端在 C_2 的點 B。接著黑、白兩端各沿著 C_1、C_2 逆時針移動，直至白端碰到 C_2 的點 $B'(-2,0)$ 便停止掃描。



4

18. 試問點 B 的坐標為下列哪一選項？（單選題，3 分）

(1) $(0,2)$　(2) $(1,\sqrt{3})$　(3) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$　(4) $(\sqrt{3},1)$　(5) $(2,0)$

19. 令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A', B'。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域 R；並於求解區內求 $\cos\angle OA'B'$ 及點 A' 的極坐標。（非選擇題，6 分）

20. （承 19 題）令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求 Ω 與 R 的面積。（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ （R 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \cdots, x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots+(x_n-\mu_X)^2]}=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-n\mu_X^2]}$

5. 二維數據 $(X,Y): (x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

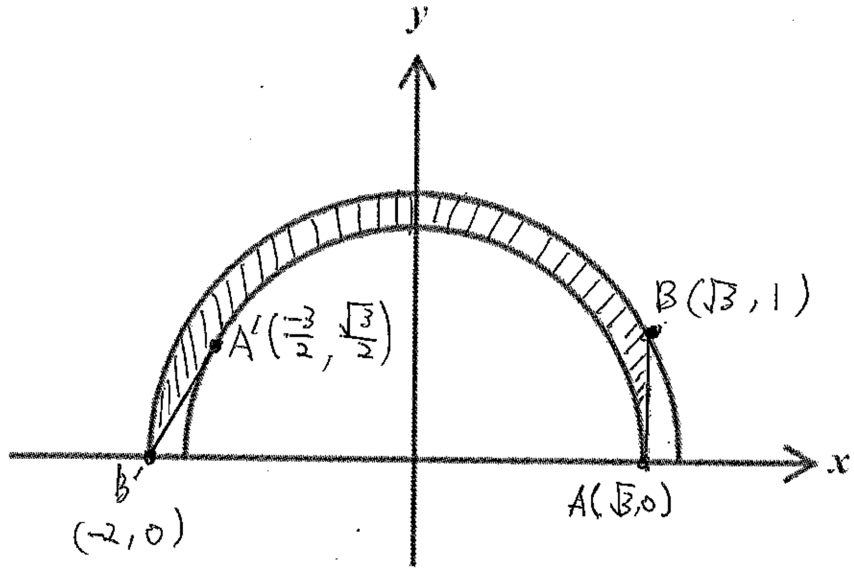
6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414, \sqrt{3}\approx 1.732, \sqrt{5}\approx 2.236, \sqrt{6}\approx 2.449, \pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log 2\approx 0.3010,\ \log 3\approx 0.4771,\ \log 5\approx 0.6990,\ \log 7\approx 0.8451$

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

題號	作　答　區
	注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。
18	1　2　3　4　5　6　7　8　9　0　−　±　【請用 2B 鉛筆作答】

作圖區　　【請用 2B 鉛筆作答】



19　求解區　　【請用黑色墨水的筆作答】

設 $A'(x, y)$

$\because A' \in C_1 \quad \therefore x^2+y^2=3 \cdots\cdots ①$

$\because \overline{A'B'}=1 \quad \therefore (x+2)^2+y^2=1 \cdots\cdots ②$

②−① $4x+4=-2 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}$ 代入① 得 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

(負不合). $\therefore A'\left(\frac{-3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

設極坐標為 $[r, \theta]$, 則

$r=\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

$\cos\theta=\frac{\left(\frac{-3}{2}\right)}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ A'的極坐標是 $\left[\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

$\because \overrightarrow{A'O}\cdot\overrightarrow{A'B'}$

$=\left(\frac{3}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$=0 \quad \therefore \cos\angle OA'B'=0$

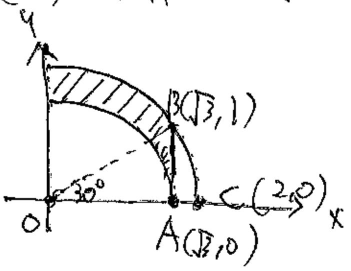
題號 | 作答區

注意：1.應依據題號順序，於作答區內作答。2.除另有規定外，書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。

【請用黑色墨水的筆作答】

20

(I) 計算 Ω.



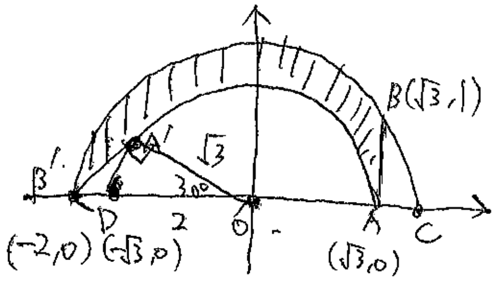
所求 = (環狀區域) − (扇形 OBC − △OAB)

$= \frac{1}{4}\cdot\left[2^2\pi-(\sqrt{3})^2\pi\right]-\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\right)$

$= \frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$

(II) 計算 R



所求 = (環狀區域) − (扇形 OBC − △OAB)

− (△OA'B' − 扇形 OA'D)

$= \frac{1}{2}\cdot\left[2^2\pi-(\sqrt{3})^2\pi\right]-\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\right)$

$-\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\pi$

$= \frac{5\pi}{12}$