

資料來源：得勝者文教

財團法人大學入學考試中心基金會

113學年度學科能力測驗試題

數學A考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

18-1	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\blacksquare}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$
18-2	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\blacksquare}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$

例：若答案格式是 $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{\underline{50}}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 \square 與第 19-2 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

19-1	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\square}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\blacksquare}$	$\overset{\pm}{\square}$
19-2	$\overset{1}{\square}$	$\overset{2}{\square}$	$\overset{3}{\square}$	$\overset{4}{\square}$	$\overset{5}{\square}$	$\overset{6}{\square}$	$\overset{7}{\blacksquare}$	$\overset{8}{\square}$	$\overset{9}{\square}$	$\overset{0}{\square}$	$\overset{-}{\square}$	$\overset{\pm}{\square}$

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占 85 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

2

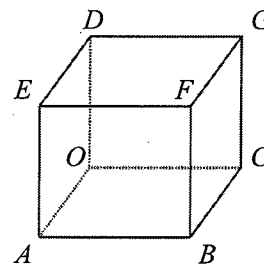
1. 研究顯示：服用某藥物後，在使用者體內的藥物殘留量隨時間呈指數型衰退。已知在服用某藥物 2 小時後，體內仍殘留有該藥物的一半劑量，試問下列哪一選項正確？

- (1) 服用 3 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{3}$ 劑量
- (2) 服用 4 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{4}$ 劑量
- (3) 服用 6 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{6}$ 劑量
- (4) 服用 8 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{8}$ 劑量
- (5) 服用 10 小時後，體內仍殘留有該藥物的 $\frac{1}{10}$ 劑量

5

2. 如圖， $OABC-DEFG$ 為一正方體，試問向量外積 $\vec{AD} \times \vec{AG}$ 與下列哪一個向量平行？

- (1) \vec{AE}
- (2) \vec{BE}
- (3) \vec{CE}
- (4) \vec{DE}
- (5) \vec{OE}



3. 設 $a \in \{-6, -4, -2, 2, 4, 6\}$ ，已知 a 為實係數三次多項式 $f(x)$ 的最高次項係數，若函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於三點，且其 x 坐標成首項為 -7 、公差為 a 的等差數列。試問共有幾個 a 使得 $f(0) > 0$ ？

- (1) 1 個
- (2) 2 個
- (3) 3 個
- (4) 4 個
- (5) 5 個

2

4. 試問有多少個實數 x 滿足 $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x + \sin \frac{\pi}{6}$ 且 $0 \leq x < 2\pi$?

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個
(4) 4 個 (5) 5 個 (含) 以上

4

5. 將 1 到 50 這 50 個正整數平分成甲乙兩組，每組各 25 個數，使得甲組的中位數比乙組的中位數小 1。試問共有幾種分法？

- (1) C_{25}^{50} (2) C_{24}^{48} (3) C_{12}^{24} (4) $(C_{12}^{24})^2$ (5) $C_{24}^{48} \cdot C_{12}^{24}$

3

6. 在同一平面上，相距 7 公里的 A, B 兩砲台， A 在 B 的正東方。某次演習時， A 向西偏北 θ 方向發射砲彈， B 則向東偏北 θ 方向發射砲彈，其中 θ 為銳角，觀測回報兩砲彈皆命中 9 公里外的同一目標 P 。接著 A 改向西偏北 $\frac{\theta}{2}$ 方向發射砲彈，彈著點為 9 公里外的點 Q 。試問砲台 B 與彈著點 Q 的距離 \overline{BQ} 為何？

- (1) 4 公里 (2) 4.5 公里 (3) 5 公里 (4) 5.5 公里 (5) 6 公里

二、多選題 (占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

3.4

7. 令坐標平面上滿足 $y = \log x$ 的點 (x, y) 所成圖形為 Γ ，試問滿足下列哪些關係式的 (x, y) 所成圖形與 Γ 完全相同？

- (1) $y + \frac{1}{2} = \log(5x)$
(2) $2y = \log(x^2)$
(3) $3y = \log(x^3)$
(4) $x = 10^y$
(5) $x^3 = 10^{(y^3)}$

2.3 8. 對任一正整數 $n \geq 2$ ，令 T_n 表示邊長為 $n, n+1, n+2$ 的三角形。試選出正確的選項。

(註：若三角形的三邊長分別為 a, b, c ，令 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ，

則三角形面積為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$)

- (1) T_n 皆為銳角三角形
- (2) $T_2, T_3, T_4, \dots, T_{10}$ 的周長形成等差數列
- (3) T_n 的面積隨 n 增大而增大
- (4) T_5 的三高依序形成等差數列
- (5) T_3 的最大角大於 T_2 的最大角

3 9. 某實驗室蒐集了大量的 A 、 B 兩相似物種，記錄其身長為 x (單位：公分) 與體重 y (單位：公克)，得 A 、 B 兩物種的平均身長分別為 $\bar{x}_A = 5.2$ 、 $\bar{x}_B = 6$ ，標準差分別為 0.3 、 0.1 。令 A 、 B 兩物種的平均體重分別為 \bar{y}_A 、 \bar{y}_B 。若 A 、 B 兩物種其體重 y 對身長 x 的迴歸直線分別為 $L_A: y = 2x - 0.6$ 、 $L_B: y = 1.5x + 0.4$ ，相關係數分別為 0.6 、 0.3 。今發現一隻身長 5.6 公分、體重 8.6 公克的個體 P ，試選出正確的選項。

- (1) $\bar{y}_A < \bar{y}_B$
- (2) A 物種的體重標準差小於 B 物種的體重標準差
- (3) 就 A 物種而言，個體 P 的體重與平均體重 \bar{y}_A 之差的絕對值大於一個標準差
- (4) 點 $(5.6, 8.6)$ 到直線 L_A 的距離小於其到直線 L_B 的距離
- (5) 點 $(5.6, 8.6)$ 與點 (\bar{x}_A, \bar{y}_A) 的距離小於其與點 (\bar{x}_B, \bar{y}_B) 的距離

3.5 10. 坐標平面上有一正方形與一正六邊形，正方形在正六邊形的右邊。已知兩正多邊形都有一邊在 x 軸上，且正方形中心 A 與正六邊形中心 B 都在 x 軸的上方，且兩多邊形恰有一個交點 P ，又知正方形的邊長為 6 ，而點 P 到 x 軸的距離為 $2\sqrt{3}$ 。試選出正確的選項。

- (1) 點 A 到 x 軸的距離大於點 B 到 x 軸的距離
- (2) 正六邊形的邊長為 6
- (3) $\vec{BA} = (7, 3 - 2\sqrt{3})$
- (4) $\overline{AP} > \sqrt{10}$
- (5) 直線 AP 斜率大於 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

- 2.3 11. 考慮二元一次方程組 $\begin{cases} ax+6y=6 \\ x+by=1 \end{cases}$ ，其餘數 a, b 之值分別由投擲一顆公正骰子與一枚均勻硬幣來決定。令 a 值為骰子出現之點數；若硬幣出現正面時 b 值為 1，若硬幣出現反面時 b 值為 2。試選出正確的選項。
- (1) 擲出 $a=b$ 的機率為 $\frac{1}{3}$
- (2) 此方程組無解的機率為 $\frac{1}{12}$
- (3) 此方程組有唯一解的機率為 $\frac{5}{6}$
- (4) 硬幣出現反面且此方程組有解的機率為 $\frac{1}{2}$
- (5) 在硬幣出現反面且此方程組有解的條件下， x 值為正的機率為 $\frac{2}{5}$

- 2.4.5 12. 在坐標平面上給定三點 $A(1,0)$ 、 $B(0,1)$ 、 $C(-1,0)$ ，令 Γ 為 $\triangle ABC$ 經矩陣 $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ 變換後的圖形，其中 a 為實數。試選出正確的選項。
- (1) 若 $a=0$ ，則 Γ 為等腰直角三角形
- (2) $\triangle ABC$ 的邊上至少有兩點經 T 變換後坐標不變
- (3) Γ 必有部分落在第四象限
- (4) 平面上找得到一個圖形 Ω 經 T 變換後為 $\triangle ABC$
- (5) Γ 的面積為定值

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 某銷售站銷售甲、乙、丙三型手機，甲手機每支利潤 100 元，乙手機每支利潤 400 元，丙手機每支利潤 240 元。上年度甲、乙、丙手機各賣出 A, B, C 支，平均每支利潤為 260 元；且知銷售甲、乙兩型手機共 $A+B$ 支的平均每支利潤為 280 元。則該站上年度售出的三型手機數量比為 $A : B : C = \frac{13-1}{2} : \frac{13-2}{3} : \frac{13-3}{5}$ 。（化為最簡整數比）

$$2 : 3 : 5$$

14. 已知 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 皆為實係數三次多項式，且除以 $x^2 - 2x + 3$ 的餘式分別為 $x + 1$ 、 $x - 3$ 、 -2 。若 $xf(x) + ag(x) + bh(x)$ 可以被 $x^2 - 2x + 3$ 整除，其中 a, b 為實數，

$$\text{則 } a = \frac{(14-1)(14-2)}{-3}, b = \frac{(14-3)}{3}。$$

15. 某商場舉辦現場報名的摸彩箱抽獎活動，報名截止後，主持人依報名人數置入同數量的摸彩球，其中有 10 顆被標示為幸運獎，其獎項為 5000 元禮券及 8000 元禮券各 5 顆，每顆球被抽中的機率皆相同，抽後不放回。抽獎前，主辦單位依獎項個數與報名人數，主持人公告中獎機率為 0.4%。開始抽獎後，每人依序抽球，每個人只有一次抽獎機會。若前 100 位參加抽獎者，恰有 1 人抽中 5000 元禮券且沒有人抽中 8000 元禮券，則抽獎順序為第 101 號者可獲禮券金額的期望值為 $\frac{(15-1)(15-2)}{25}$ 元。

16. 坐標平面上，已知向量 \vec{v} 在向量 $(2, -3)$ 方向的正射影長比原長少 1，而在向量 $(3, 2)$ 方向的正射影長比原長少 2。若 \vec{v} 與兩向量 $(2, -3), (3, 2)$ 的夾角皆為銳角，則 \vec{v} 在向量 $(4, 7)$ 方

向的正射影長為 $\frac{(16-1)\sqrt{(16-2)}}{(16-3)}$ 。(化為最簡根式)

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

17. 坐標平面上，在以 $O(0,0), A(0,1), B(1,1), C(1,0)$ 為頂點的正方形(含邊界)內，令 R 為滿足下述條件的點 $P(x, y)$ 所成區域：與點 $P(x, y)$ 的距離為 $|x - y|$ 之所有點所成圖形完全落在正方形 $OABC$ (含邊界) 內。則區域 R 的面積為 $\frac{(17-1)(17-2)}{3}$ 。(化為最簡分數)

$$\frac{1}{3}$$

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。

選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標空間中，設 O 為原點， E 為平面 $x-z=4$ 。試回答下列問題。

18. 若原點 O 在平面 E 上的投影點為 Q ，且向量 \overrightarrow{OQ} 與向量 $(1,0,0)$ 的夾角為 α ，則 $\cos\alpha$ 之值為下列哪一選項？（單選題，3 分）

- (1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. 已知空間中有一點 $P(a,b,c)$ 滿足向量 \overrightarrow{OP} 與向量 $(1,0,0)$ 的夾角 $\theta \leq \frac{\pi}{6}$ 。試說明實數 a,b,c 滿足不等式 $a^2 \geq 3(b^2+c^2)$ 。（非選擇題，4 分）

$$\cos\theta = \frac{(a,b,c) \cdot (1,0,0)}{|(a,b,c)| \cdot |(1,0,0)|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\because \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \therefore \cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow 4a^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2) \quad \Rightarrow a^2 \geq 3(b^2+c^2)$$

20. 承 19 題，已知點 P 在平面 E 上且 $b=0$ 。試求 c 的最大可能範圍，並求線段 OP 的最小可能長度。（非選擇題，8 分）

$$\text{設 } P(4+c, 0, c)$$

$$\text{由 19. } \Rightarrow (4+c)^2 \geq 3c^2$$

$$\Rightarrow 2c^2 - 8c - 16 \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{2-2\sqrt{3} \leq c \leq 2+2\sqrt{3}}$$

$$|OP| = \sqrt{(4+c)^2 + c^2}$$

$$= \sqrt{2c^2 + 8c + 16}$$

$$= \sqrt{2(c+2)^2 + 8}$$

$$\therefore -2 \leq c-2 \leq 2-2\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{當 } c=2-2\sqrt{3} \text{ 時, } |OP| \text{ 有 min}$$

$$= \sqrt{2(4-2\sqrt{3})^2 + 8} = \underline{4\sqrt{3}-4}$$

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2] - n\mu_X^2}$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$